問題 3.7, (1) $X^3-7X-6=0$.
(解) カルダノの公式より

$$\sqrt[3]{3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}+\sqrt[3]{3-\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}}}{3}+\frac{\sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}}{3}$$

が根のひとつ．ボンベリの方法で $\sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}}=-3+2\sqrt{-3}$, $\sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}=-3-2\sqrt{-3}$ がわかるから，上の根は -2 である．(実際には，目の子で因数分解 $X^3-7X-6=(X+1)(X+2)(X-3)$ を見つけるほうが早い．)

問題 4.3, (3) $X^4+4X^3+8X^2+4X+7=0$.
(解) これも因数分解 $X^4+4X^3+8X^2+4X+7=(X^2+1)(X^2+4X+7)$ を見つけるほうが早いだろうけれど... まずカルダノ変換で $(X+1)^4+2(X+1)^2-4(X+1)+8=0$ とする．「巡回行列」項に従えば c_2^2 の 3 次方程式 $c_2^6+c_2^4-(7/4)c_2^2-1/4=0$ を解く必要が生じる．これも目の子で $c_2^2=1$ が見つかるけれども，それに気がつかないと仮定して，まともに解いてみる．カルダノ変換によって

$$\left(c_2^2+\frac{1}{3}\right)^3-\frac{5^2}{2^2 3}\left(c_2^2+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3^3}=0$$

と変形すると，カルダノの公式より根のひとつは

$$\sqrt[3]{-\frac{11}{2\cdot 3^3}+\frac{13}{2^3\cdot 3}\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-\frac{11}{2\cdot 3^3}-\frac{13}{2^3\cdot 3}\sqrt{-1}}=\frac{1}{6}\sqrt[3]{-44+117\sqrt{-1}}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{-44-117\sqrt{-1}}$$

である．ボンベリの方法を使うと

$$\sqrt[3]{-44+117\sqrt{-1}}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{-1}}{2},\ \sqrt[3]{-44-117\sqrt{-1}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{-1}}{2}$$

がわかる．このとき $c_2^2+1/3=4/3$ より $c_2=\pm 1$ である．c_1, c_2, c_3 はひと組見つければ良いから，

$$c_1=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},\ c_2=1,\ c_3=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}$$

として良く，

$$\varphi(t)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}t+t^2+\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}t^3$$

より $X+1=\varphi(1), \varphi(\sqrt{-1}), \varphi(-1), \varphi(-\sqrt{-1})$. すなわち $\sqrt{-1}$, $-2+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-1}$, $-2-\sqrt{-3}$ である．

ボンベリの方法を使う箇所では，次の定理を使うと計算が楽になる場合が多い．

定理　a, b は共に有理数で，$\sqrt[3]{a^2-b}$ も有理数だと仮定する．3 次方程式

$$4X^3-3(\sqrt[3]{a^2-b})X=a$$

が有理数の根 $X=u$ をもつとき，$v=u^2-\sqrt[3]{a^2-b}$ とおけば

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=u+\sqrt{v},\quad \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=u-\sqrt{v}$$

が成立する．